Uppgift 1 .... *(6 poäng)*

Kalle har två linser med brännvidderna 25 mm och 100 mm. Han sitter och detaljstuderar sin frimärkssamling och noterar då att det närmaste han kan betrakta sina frimärken och se skarpt är 17 cm.

(a) (2 poäng) Linserna var de enda linserna som fanns i en enkel leksakskikare av tubmodell. Vilken vinkelförstoring gav kikaren?

Lösning:
För kikaren sitter den svagaste linsen först så med beteckningar enligt tidigare gäller

$$M_\Theta = \frac{f_2}{f_1} = \frac{100}{25} = \underline{4}.$$

(b) (4 poäng) Han tänker att det skulle nog behövas 20 gångers vinkelförstoring, går det att göra med de två linserna? Beskriv i så fall hur han skall göra och vilka inbördes avstånd linserna och frimärket skall ha samt rita upp strålgången för mikroskopet.

Lösning:
Han måste bygga ett mikroskop, för detta gäller:

$$M_\Theta = \frac{L\, d_{\min}}{f_1\, f_2}$$

där L är avståndet mellan linsernas fokalpunkter och avståndet mellan linserna för 20 ggr vinkelförstoring ges alltså av

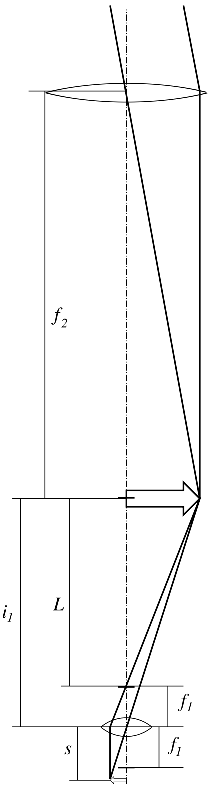
$$\begin{aligned} L &= \frac{M_\Theta\, f_1\, f_2}{d_{\min}} + f_1 + f_2 \\ &= \left(\frac{20 \cdot 25 \cdot 100}{170} + 25 + 100\right) \text{mm} \approx \underline{419\,\text{mm}}. \end{aligned}$$

Avståndet i mellan den första linsen och bilden den genererar ges då av

$$i_1 = L - f_2$$

och därmed skall avståndet mellan frimärket och första linsen vara

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{i_1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{L+f_1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{25} - \frac{1}{294+25}} \text{mm} \approx \underline{27\,\text{mm}}. \end{aligned}$$



Uppgift 2 .... *(8 poäng)*

Natrium är en alkalimetall, dvs den har *en* elektron i sitt yttersta skal som är $n = 3$. I grundtillståndet är denna i grundorbitalen s ($\ell = 0$), detta betecknas 3s $^2\mathrm{S}_{1/2}$. Den så kallade natriumdubbletten uppkommer i övergångar inom skalet $n = 3$ mellan grundnivån och orbitalen p ($\ell = 1$). Orbitalen p delas upp genom sk spinn-bankoppling (LS-koppling) till finstrukturnivåer, dessa nivåer betecknas 3p $^2\mathrm{P}_{1/2}$ och 3p $^2\mathrm{P}_{3/2}$.

Ljuset från övergången 3s $^2\mathrm{S}_{1/2}$ – 3p $^2\mathrm{P}_{1/2}$ har våglängden 589,592 nm och övergången 3s $^2\mathrm{S}_{1/2}$ – 3p $^2\mathrm{P}_{3/2}$ har våglängden 588,995 nm.

(a) (2 poäng) Hur stor är energiskillnaden som uppkommer genom LS-kopplingen mellan 3p $^2\mathrm{P}_{1/2}$ och 3p $^2\mathrm{P}_{3/2}$?

Uppgift 2 fortsätter på nästa sida...

Lösning:
Energin för var och en av övergångarna ges av

$$E = h\,c/\lambda.$$

Skillnaden mellan energinivåerna ges då av

$$\Delta E = E_{3/2} - E_{1/2} = h\,c\left(\frac{1}{\lambda_{3/2}} - \frac{1}{\lambda_{1/2}}\right)$$
$$= 4{,}136 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}\left(\frac{1}{588{,}995 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{589{,}592 \cdot 10^{-9}}\right)\,\mathrm{eV} = \underline{2{,}13\,\mathrm{meV}}$$

(b) (2 poäng) Hur många spalter behöver man i en (ideal) gitterspektrograf för att kunna upplösa finstrukturuppdelningen i Natrium beskriven ovan i första ordningens linjer?

Lösning:

$$R = m\,N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

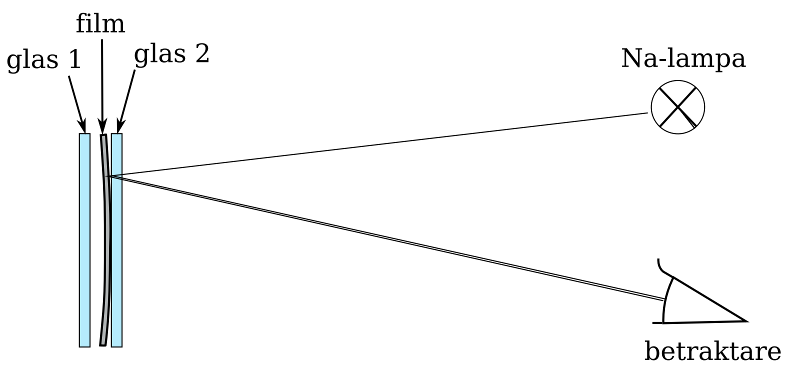
$m = 1$ ger

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589}{588{,}995 - 589{,}592} = \underline{987}$$

(c) (2 poäng) Om man lägger ett svagt magnetfält över Natriumet får man uppdelning enligt Zeemaneffekten utöver LS-kopplingen och inte mindre än tio linjer från övergången. Om man däremot lägger på ett mycket starkt magnetfält bryter LS-kopplingen ihop totalt och man ser lika många linjer som det finns möjliga värden på m_ℓ för 3p elektronerna. Detta kallas Paschen-Back effekt. Hur många linjer syns då från övergången 3p - 3s i Natrium?

Lösning:
$\ell = 1 \Rightarrow m_\ell = 0, \pm 1$ dvs 3 nivåer.
(Egentligen delas 3p-nivån upp i 6 komponenter efter skilda m_ℓ och m_s värden men uppdelningen pga spinnmomentet av 3s-nivån är lika stor och övergångarna måste hålla $\Delta m_s = 0$ och kontentan blir tre linjer.)

Vid betraktande av gamla diabilder som sitter i ramar med glas enligt figur 1 kan man ibland störas av interferensfenomen mellan filmen och glaset i ramen, sk newtonringar. Man vet att filmen vill bukta sig kraftigt åt det ena hållet (det är själva anledningen till att man har glas i ramen) antag alltså att filmen är i kontakt med glasyta två i figur 1 någonstans mitt på ytan och att ringarna uppkommer eftersom filmen inte är i perfekt kontakt med glaset i kanterna.

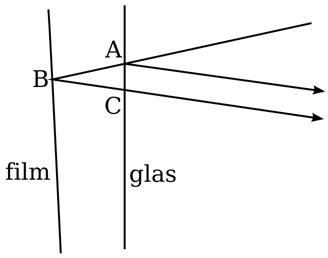


Figur 1: Kraftigt oproportionerlig principskiss över newtonringar i diabild.

Uppgift 2 fortsätter på nästa sida...

(d) (2 poäng) För att mäta upp hur stort avståndet mellan filmen och glaset är i kanterna använder vi en lågtrycksnatriumlampa som ger dubbletten enligt ovan och betraktar reflektionen av ljuset enligt figur 1. Vi ser då ringar omslutande varandra som uppfyller hela bildytan. Den högsta ordningen finns i övre högra hörnet där den 10:e mörka ringen utanför det centrala fältet skymtar. Hur stort är största avståndet mellan filmen och glasyta 2 i figuren? Bortse från vinkeleffekten dvs antag att vi både belyser och betraktar ytan ortogonalt. Det är inte möjligt att se skillndad på ringar från de två natriumlinjerna så betrakta dem som en.

Lösning:
I A går vi från högre till lägre brytningsindex och vi får reflektion utan fasskift, i B går vi från lägre till högre och får ett fasskift π. I centrum där vi har kontakt är avståndet ABC $= 2x = 0$ och vi får fasskift π, motfas mellan reflektionerna och alltså ett mörkt fält. Mörka ringar får vi när avståndet $2x = n\,\lambda$ där n är ett positivt heltal. Tionde mörka ringen får vi vid $n = 10$. Alltså har vi



$$x = n\,\lambda/2 = 5\,\lambda = 5 \cdot 589\,\mathrm{nm} = 2{,}95\,\mu\mathrm{m}$$

Uppgift 3 .... *(2 poäng)*
Laser bygger på principen om inverterad population, dvs att det finns en exiterad nivå som innehåller fler elektroner än grundnivån, eller har större sannoliket att innehålla någon elektron än grundnivån. Beskriv ett sätt att åstadkomma detta, sk optisk pumpning.

Uppgift 4 .... *(8 poäng)*
Radioaktiv datering med kol-14 metoden bygger på att mängden ^{14}C befinner sig i jämvikt mellan radioaktivt sönderfall och nybildande genom kosmisk strålning högt uppe i atmosfären enligt

$$\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}\mathrm{C} + \mathrm{p}. \qquad (1)$$

Så länge levande material omsätter kol och ingår i kolkretsloppet är förhållandet mellan kolisotoperna ^{14}C och ^{12}C detsamma som i atmosfären. När individen dör och omsättningen slutar minskar förhållandet ^{14}C/^{12}C med halveringstiden 5730 år. Massorna för atomerna ^{14}N och ^{14}C (dvs inklusive elektroner) är 14,003074 u respektive 14,003242 u

(a) (1 poäng) Sker bildandet av ^{14}C enligt rekationen (1) genom stark, svag eller elektromagnetisk växelverkan? Motivera svaret.

Lösning:
Vare sig reaktionen går direkt genom att den neutronen utbyter en kvark med en proton i kärnan genom utbyte av en pion eller om neutronen absorberas av kärna som då ger ifrån sig en proton så är det krafter mellan nukleoner och kvarkar dvs stark växelverkan.

(b) (1 poäng) ^{14}C sönderfaller till ^{14}N igen med β-sönderfall. Skriv ner reaktionsformeln för detta.

Lösning:
Laddningsbevarande ger att det måste vara ett β^--sönderfall.

$${}^{14}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

(c) (2 poäng) β-sönderfallet går direkt till grundnivån i ^{14}N. Vilken är den högsta energi β-strålningen från β-sönderfallet från ^{14}C till ^{14}N kan få om man bortser från rörelseenergin som går till kvävekärnan? (I ett referenssystem där kolatomen befann sig i vila.)

 Uppgift 4 fortsätter på nästa sida...

Lösning:
Den frigjorda energin ges av

$$Q = (M_{^{14}\mathrm{C}} - M_{^{14}\mathrm{N}} - M_{\nu_e})c_0^2 = (14{,}003242 - 14{,}003074 - 0) \cdot 931{,}4943\,\mathrm{MeV} = 0{,}15649\,\mathrm{MeV}$$

(elektronmassan går bort mot att atommassan för kväve innehåller en elektron mer än kol). Den frigjorda energin från sönderfallet kan fördela sig olika mellan de kväveatomen, elektronen och neutrinon, elektronen får högst energi (kortast compton-våglängd) om neutrinon inte får någon energi alls. Om vi försummar rekylen hos kärnan blir den energin $\underline{K_\mathrm{N} = Q = 0{,}15649\,\mathrm{MeV}}$.

(d) (2 poäng) Gör den fullständiga uträkning med att ta hänsyn till rekylenergin för kvävekärnan för (c). Ger det någon märkbar skillnad?

Lösning:
Då delas energin mellan kväveatomen och elektronen. Konservering av rörelsemängd och energi ger

$$\begin{cases} Q = K_\mathrm{N} + K_\beta \\ \mathbf{p}_\mathrm{N} = -\mathbf{p}_\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = \frac{p_\mathrm{N}^2}{2\,m_\mathrm{N}} + \frac{p_\beta^2}{2\,m_\beta} \\ p_\mathrm{N} = p_\beta = p \end{cases}$$

$$2\,Q = p^2 \frac{m_\beta + m_\mathrm{N}}{m_\beta\, m_\mathrm{N}}$$

$$\begin{aligned} K_\beta &= Q \frac{m_\mathrm{N}}{m_\beta + m_\mathrm{N}} \\ &= \frac{Q}{1 + \frac{m_\beta}{m_\mathrm{N}}} \\ &= \frac{0{,}15649}{1 + \frac{5{,}5\cdot 10^{-4}}{14}}\,\mathrm{MeV} \\ &= 0{,}15649\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Kvoten m_β/m_N som är justeringen är $3 \cdot 10^{-5}$ är förstås inte märkbar ur någon praktisk betydelse, men antagligen mätbar med rätt aparatur.

(e) (2 poäng) En trädstam som grävts fram vid Torneträsk visade ett förhållande $^{14}\mathrm{C}/\,^{12}\mathrm{C}$ som var $1/5$ av förhållandet i atmosfären före industrialiseringen och kärnvapentesternas tid. När dog trädet?

Lösning:

$$N = N_0\, e^{-\ln 2 \frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$$

$$\begin{aligned} t &= -t_{\frac{1}{2}} \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{\ln 2} \\ &= -t_{\frac{1}{2}} \frac{\ln \frac{N_{^{14}\mathrm{C}}/N_{^{12}\mathrm{C}}}{N_{0\,^{14}\mathrm{C}}/N_{0\,^{12}\mathrm{C}}}}{ln 2} \\ &= -5730\, \frac{\ln 1/5}{\ln 2}\,\text{år} = \underline{13\,300\,\text{år}} \end{aligned}$$